# Záróvizsga kérdéssor

Tantárgycsoport neve: **Analízis**

Neptun kódja: ZVETE93BGAN

Kreditértéke: 16

Tantárgycsoportba sorolt tantárgyak:

- **Analízis mérnököknek** (BMETE93BG21)
- **Többváltozós analízis mérnököknek** (BMETE93BG22)
- **Komplex függvénytan** (BMETE92BG36)

Képzés: Gépészmérnöki alapképzési szak (2N-AG0)

Specializáció(k): Matematikus-mérnök

Tantárgyfelelősök:


- Dr. Nagy Katalin, knagy@math.bme.hu
  Differenciálegyenletek Tanszék, Matematika Intézet, TTK
- Dr. Horváth Miklós Tibor, horvath@math.bme.hu
  Analízis Tanszék, Matematika Intézet, TTK


A tantárgyak hatályos adatlapját a Gépészmérnöki Kar Oktatási Portálján tekintheti meg.

https://oktatas.gpk.bme.hu/

A vizsgafelkészülés előtt a kérdéssor időbeli hatályát mindig ellenőrizze az edu.gpk.bme.hu oldalon!

**Érvényes: 2021. szeptember 1-től**

*Dr. Nagy Katalin* s.k.
egyetemi docens

*Dr. Horváth Miklós Tibor* s.k.
egyetemi tanár

**Analízis mérnököknek (BMETE93BG21)**

1. **Valós és komplex számok. Monoton és konvergens sorozatok, teljességi axióma. Nevezetes határértékek.**
   Valós és komplex számok. Valós számfogalom axiomatikus felépítése. Komplex számok trigonometrikus és algebrai alakja, nevezetes műveletek.
   Sorozat fogalma, határértéke, monoton és konvergens sorozatok, nevezetes tételek, nevezetes határértékek, sorozatok nagyságrendje, rekurzív sorozatok.

2. **Egyváltozós valós függvények. Folytonos függvények alaptulajdonságai.**
   Egyváltozós valós függvények. Függvény határértéke, folytonossága, egyenletes folytonosság, szakadási helyek. $f \in C[a,b]$ alaptételei – Bolzano, Weierstrass, Heine, inverz folytonossága.

3. **Differenciálható függvények alaptulajdonságai, inverz függvény, függvényvizsgálat, l'Hospital szabály.**
   Egyváltozós valós függvények deriváltja. Deriválási szabályok. Elemi függvények, elemi függvények deriváltja. Implicit alakban adott függvények. Paraméteres alakban adott görbék, polárkoordinátás alakban adott görbék. Lokális menettulajdonságok, lokális szélsőérték és derivált kapcsolata. Abszolút szélsőérték. Differenciálszámítás középértéktételei – Rolle, Lagrange, Cauchy. L'Hospital szabály. Teljes függvényvizsgálat.

4. **Taylor-polinom, nevezetes Taylor-sorok, abszolút és feltételesen konvergens sorok.**
   Függvénygörbék érintkezése, Taylor-polinom, Lagrange féle maradéktag, nevezetes Taylor-sorok. Simulókör, görbület. Végtelen számsorok – alapvető definíciók és példák, pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergencia-kritériumok, abszolút és feltételes konvergencia, váltakozó előjelű sorok, Leibniz-sorok. (Sorok elemeinek átrendezhetősége, sorok szorzata.)

5. **Határozatlan integrál és Riemann-integrál.**
   Határozatlan integrál, Riemann-integrál, Riemann-integrálhatóság elégséges feltételei. Riemann-integrál tulajdonságai, integrálszámítás középértéktétele. Primitív függvény létezésének elégséges feltétele, integrálfüggvény, Newton-Leibniz formula.

6. **Alapvető integrálási technikák, Riemann-integrál alkalmazásai, improprius integrál.**
   Alapvető integrálási technikák (parciális integrálás, helyettesítés, racionális törtfüggvények integrálása) – határozott és határozatlan integrálban is. Határozott integrál alkalmazásai – Jordan mérték, terület, szektorszerű idom területe, forgástest térfogata, ívhossz, forgástest felszíne, súlypont. Improprius integrál.

**Többváltozós analízis mérnököknek (BMETE93BG22)**

1. **Két- és többváltozós függvények folytonossága, differenciálása, érintősík, gradiens.**
Kétváltozós függvények szemléltetése, határérték, folytonosság. Parciális, iránymenti és totális differenciálhatóság, érintősík, gradiens. Young-tétel, teljes differenciálok, egzakt differenciálegyenletek.
2. **Implicit függvények, lokális és feltételes szélsőértékek.**
$R^n$-ből $R^m$-be képező függvény differenciálhatósága, láncszabály. Lagrange-féle középértéktétel, differenciálok, hibaszámítás, Taylor-polinom. Lokális szélsőérték, kvadratikus alakok, Hesse-mátrix, stacionárius pontok osztályozása. Implicitfüggvény-tétel, (inverzfüggvény-tétel). Feltételes és abszolút szélsőérték-problémák. Lagrange multiplikátor módszer.
3. **Két- és többváltozós függvények integrálása. Fubini-tétel, integrálás helyettesítéssel, alkalmazások.**
Kettős integrál, Fubini-tétel, integrálás normáltartományon. Helyettesítés kettős integrálban, mérték- és integráltranszformáció, Jacobi-determináns, lineáris helyettesítések, síkbeli polárkoordináták. Hármas integrál, helyettesítés hármas integrálban, hengerkoordináták, gömbi koordináták. Többes integrál és alkalmazásai a geometriában és a fizikában.
4. **Görbék és felületek. Skalár-vektor és vektor-vektor függvények differenciálása. Gradiens, divergencia, rotáció, Laplace-operátor. Vektor-vektor függvények vonal- és felületi integrálja. Integrálátalakító tételek.**
Térgörbék (rektifikálhatóság, ívhossz, ívhossz szerinti paraméterezés, görbület, torzió, kísérő triéder, Frenet-formulák). Felületek (irányíthatóság, érintősík, felszín), Skalármezők és vektormezők differenciálása (gradiens, deriválttenzor, divergencia, rotáció, Laplace operátor), szorzatok divergenciája és rotációja. Vonalintegrál, potenciálos, konzervatív és örvénymentes vektormezők, Newton-Leibniz formula. Vektormező felületi integrálja. Green-tétel, Stokes-tétel. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Vektoranalízis alkalmazásai a geometriában és a fizikában.
5. **Függvénysorozatok, függvénysorok, hatványsorok, Taylor-sorok, Fourier-sorok.**
Függvénysorozatok, függvénysorok pontonkénti és egyenletes konvergenciája, Cauchy-kritérium, folytonosság, deriválás, integrálás, Weierstrass-tétel. Hatványsorok, konvergenciasugár, konvergenciatartomány, egyenletes konvergencia és következményei, Taylor-sor, analitikus függvények, nevezetes Taylor-sorok (exponenciális, trigonometrikus, mértani, binomiális, logaritmus, inverz trigonometrikus). Trigonometrikus és Fourier-sorok. (Fourier-sorok pontonkénti és egyenletes konvergenciájára vonatkozó tételek, Fejér-tétel, $L^2$ konvergencia, Parseval-egyenlőség.) A Fourier sorfejtés technikája és alkalmazásai, hővezetési egyenlet megoldása véges rúdon.
6. **Komplex függvények, Cauchy-Riemann egyenletek, komplex vonalintegrál**
Komplex függvények szemléltetése, példák (lineáris, 1/z, $\bar{z}$, polinomok, gyökvonás, exponenciális, trigonometrikus és logaritmus függvények). Komplex függvények differenciálhatósága, Cauchy-Riemann egyenletek, harmonikus társkeresés. Komplex vonalintegrál, Newton-Leibniz formula, Cauchy-tétel és következményei, Cauchy-formula, reguláris komplex függvények sorfejtése.

**Komplex függvénytan (BMETE92BG36)**

1. Komplex számok alapjai, $\mathbb{C}$ topológiája, komplex sorozatok, Riemann-féle számgömb, komplex függvények határértéke és folytonossága

2. Komplex differenciálhatóság, Cauchy-Riemann egyenletek. Reguláris és harmonikus függvények, harmonikus társ. Hatványsorok kovergenciája és az összegfüggvény regularitása.
3. Elemi függvények: $e^z, \sin z, \cos z, \log z, z^w, \sinh z, \cosh z, (z, w \in \mathbb{C})$ és tulajdonságaik. A logaritmus reguláris ága.

4. Komplex vonalintegrál és tulajdonságai, helyetttesítéses integrál, Newton-Leibniz szabály, primitív függvény. Goursat lemma, Cauchy alaptétel konvex tartományon, Goursat lemma általánosítása, Cauchy integrálformula konvex tartományon.

5. Görbe indexe és tulajdonságai. Általános Cauchy tétel és következményei. Reguláris függvény hatványsorba fejtése, Cauchy integrálformulák konvex tartományon.

6. Morea tétele, reguláris függvény zéróhelyei. Unicitás tétel, Cauchy-féle egyenlőtlenségek, Liouville tétele, az algebra alaptétele, a maximum-tétel.

7. Laurent-sorok definíciója, regularitása. Laurent-sorba fejthetőség. Izolált szingularitások és osztályozásuk, az osztályok jellemzése, $\infty$-beli izolált szingularitás, a Reziduum tétel.

8. Konform leképezések. Lineáris törtfüggvények, mint a zárt sík önmagára való konform leképezései. Körlapnak, illetve félsíknak körlapra, illetve félsíkra való leképezése.